Concours des 28, 29 et 30 mai 1980 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS

(Options M.P.T.)

***

MATHEMATIQUES

(à distribuer aux candidats)

Les candidats n'ont pas à recopier l'énoncé sur leur feuille de composition

I - Pour tout réel θ, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, on donne le point M du plan (rapporté au repère orthonormé $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$) par :

$$\overrightarrow{OM} = a\,(1 + \cos\theta)\,\vec{I}$$

où a est une constante réelle > 0 et $\vec{I} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

1°) Tracer la courbe (C), ensemble des points M.

2°) On oriente la courbe (C) dans le sens des θ croissants. Donner en fonction de θ l'angle $\alpha = (\vec{i}, \overrightarrow{MT})$ ($\overrightarrow{MT}$ vecteur unitaire tangent).

Donner en fonction de θ le rayon de courbure R de (C) au point M.

3°) Déterminer en fonction de θ les coordonnées, dans le repère $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ du centre de courbure M_1 de la courbe (C) en M.

On appelle (C_1) l'ensemble des points M_1 pour $\theta \in]-\pi, \pi[$. Donner une équation polaire de (C_1), en prenant comme origine d'un nouveau repère le point Ω $(\overrightarrow{O\Omega} = \frac{2}{3}a\vec{i})$. Déterminer une transformation géométrique simple transformant (C) en (C_1).

II - 1°) Soit n un entier strictement plus grand que 1. Démontrer que la fraction rationnelle à coefficients réels :

$$F(x) = \frac{(x+1)^n - 1}{x}$$

est en fait un polynôme de degré n - 1. Donner ses coefficients.

2°) Calculer les zéros de F (dans le corps des complexes) et déterminer la position des images de ces zéros dans le plan complexe. Montrer que ces images sont situées sur un cercle, que l'on déterminera.

3°) Quel est le produit des zéros de F ? Calculer les modules et arguments des zéros de F. En déduire la valeur du produit :

$$\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(\sin\frac{3\pi}{n}\right)\ldots\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

Vérifier le résultat trouvé pour n = 2, 3, 4, 6.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

III - On désigne par $\mathcal{D}$ l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

et par Δ le produit cartésien $]0, +\infty[\times [0, 2\pi[$

On établit une bijection entre Δ et $\mathcal{D}$ par l'application

$$\psi : (r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$$

$$\Delta \longrightarrow \mathcal{D}$$

soit f une fonction $\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad (x, y) \longmapsto f(x, y)$

qui admet dans $\mathcal{D}$ des dérivées partielles secondes continues, telles que en tout $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x, y) = 0 \qquad (1)$$

on désigne par ϕ la fonction composée $f \circ \psi : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

1°) A quelle équation aux dérivées partielles satisfait ϕ sachant que f vérifie (1). (On demande une relation entre les dérivées partielles premières et secondes de ϕ).

2°) On suppose que ϕ ne dépend que de r. Trouver toutes les fonctions ϕ qui satisfont à la relation trouvée dans la première question.

IV - 1°) Donner le rayon de convergence de la série entière à termes réels :

$$S(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$$

2°) Montrer que si $x > 0$ $\qquad S(x) > e^{ex - \frac{1}{2}}$

3°) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > N$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} < e^{n - \frac{1}{2} + \frac{1}{N}}$$

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

4°) Montrer que si $x > 0$

$$S(x) < 1 + \sum_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!} + e^{\frac{1}{N}} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{e^{n - \frac{1}{2}}}{n!} x^n$$

5°) Déduire de la question 4 que si $x > 0$

$$S(x) < 1 + \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!} + e^{\frac{1}{N}} \; e^{ex - \frac{1}{2}}$$

6°) Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{S(x)}{e^{ex - \frac{1}{2}}} = 1$$

-§-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail